

## MAT314 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ QUIZ SORULARI

- 1)  $\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^6}$  karmaşık sayısını kutupsal koordinatlarda yazınız.
- 2)  $z_1 = 2 + i$ ,  $z_2 = -1 + 3i$ ,  $z_3 = i$  olmak üzere aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.
- a)  $\left| z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_3} \right|$
- b)  $Im \left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_1} \right)$

Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

## CEVAPLAR

1)  $(-\pi, \pi]$  aralığını seçelim.

$$\theta = Argz = Arctan\left(\frac{1}{1}\right) = Arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{ve} \quad r = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$(1+i) = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

olarak yazılır. De Moivre Formülü'nden  $(1+i)^4$  karmaşık sayısı kutupsal koordinatlarda

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 \left( \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right) = 2^2 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde

$$\theta = Argz = Arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6} \quad \text{ve} \quad r = |\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$(\sqrt{3}-i) = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

olarak yazılır. De Moivre Formülü'nden  $(\sqrt{3}-i)^6$  karmaşık sayısı kutupsal koordinatlarda

$$(\sqrt{3}-i)^6 = 2^6 \left( \cos\left(-6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-6 \cdot \frac{\pi}{6}\right) \right) = 2^6 (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^6} &= \frac{2^2(\cos \pi + i \sin \pi)}{2^6(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))} \\ &= \frac{1}{2^4} [\cos(\pi - (-\pi)) + i \sin(\pi - (-\pi))] \\ &= \frac{1}{2^4} [\cos 2\pi + i \sin 2\pi]\end{aligned}$$

şeklindedir.

2)

a)

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_3}| &= |(2+i)(-1-3i) + (-1+3i)(-i)| \\ &= |-2+3-6i-i+i+3| \\ &= |4-6i| \\ &= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_1}\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{2+i}{-1+3i} + \frac{i}{2+i}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{(2+i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} + \frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{-3i+3}{10}\right) \\ &= -\frac{3}{10}\end{aligned}$$